Thermodynamique et mécanique des fluides – Chapitre 1

Rappels de mécanique – TD

Exercice 1 : Question de cours

On suppose que la Terre décrit une trajectoire circulaire de rayon R autour du Soleil et de période de révolution T.

On donne :

- $G = 6{,}67.10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$ la constante gravitationnelle ;
- $M_\mathrm{S} = 1{,}99.10^{30}\,\mathrm{kg}$ la masse du Soleil.

1. Établir la troisième loi de Kepler.

2. En déduire la valeur du rapport $\dfrac{T^2}{R^3}$.

Exercice 2 : Mise en rotation d'un moteur

On étudie la mise en rotation d'un rotor (partie mobile d'un moteur) de moment d'inertie $J = 10{,}7.10^{-7}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}}$ autour de son axe. Celui-ci est soumis à un couple moteur C_m dont la valeur est proportionnelle à l'intensité du courant $I = 0{,}1\,\mathrm{A}$ qui traverse le stator (partie fixe d'un moteur), soit $C_\mathrm{m} = k\,I$, avec $k = 22.10^{-3}\,\mathrm{N \cdot m \cdot A^{-1}}$.

1. En négligeant les frottements, déterminer l'équation vérifiée par la vitesse angulaire $\omega(t)$ du rotor.

2. Résoudre cette équation pour obtenir l'expression $\omega(t)$, en supposant que le rotor est au repos à l'instant initial.

3. Calculer le temps t_0 pour atteindre la vitesse de consigne $\omega_0 = 1\,800\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

Le rotor subit en réalité un couple de frottement solide $C_\mathrm{s} = -400\,\mathrm{\mu N \cdot m}$ et un couple de frottement fluide $C_\mathrm{f} = -\lambda\,\omega$, avec $\lambda = 1{,}0.10^{-6}\,\mathrm{N \cdot m \cdot s}$.

4. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire $\omega(t)$, puis la résoudre.

5. Quelle est la vitesse angulaire maximale que peut atteindre le rotor ?

6. Déterminer le temps t_1 pour atteindre 95% de la valeur maximale.

7. L'effet des frottements est-il négligeable sur le temps de mise en rotation du rotor ?

Exercice 3 : Pétrolier

Les pétroliers sont des navires-citernes de grandes tailles servant au transport du pétrole.

On considère un pétrolier de longueur $L = 100\,\mathrm{m}$, de largeur $\ell = 20\,\mathrm{m}$ et de hauteur $H = 30\,\mathrm{m}$, que l'on assimile à un parallélépipède rectangle. Il possède une masse à vide $M = 20\,000\,\mathrm{t}$, et la densité du pétrole qu'il contient est $d = 0{,}80$.

1. Déterminer la hauteur h du pont du pétrolier par rapport au niveau de l'eau lorsqu'il est à vide.

Pour des raisons de sécurité, le pont du pétrolier doit être à une hauteur minimale $h_\mathrm{min} = 10\,\mathrm{m}$ au-dessus du niveau de l'eau.

2. Calculer le volume maximal V_max de pétrole que peut contenir le pétrolier.

Exercice 4 : Piège à électrons

On considère un électron de masse $m = 9{,}1.10^{-31}\,\mathrm{kg}$ et de charge $q = -e = -1{,}6.10^{-19}\,\mathrm{C}$ qui est libre de se déplacer le long de l'axe (Oz). Un dispositif de piégeage lui confère une énergie potentielle :

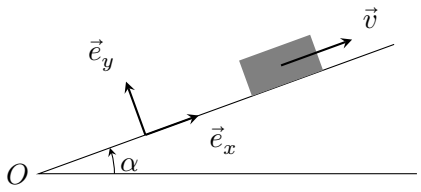
$$E_\mathrm{p}(z) = \frac{e\,V_0}{2\,d^2}\,z^2$$

avec $V_0 = 5{,}0\,\mathrm{V}$ et $d = 4{,}0\,\mathrm{mm}$. On suppose que l'énergie mécanique de l'électron est conservée au cours de son mouvement.

1. Montrer que l'électron réalise des oscillations harmoniques dans le piège.
2. Calculer la fréquence de ces oscillations.

Exercice 5 : Glissement sur un plan incliné

Une masse $m = 600\,\text{g}$ est lancée depuis le bas d'un plan incliné faisant un angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale. L'axe (Ox) est parallèle au plan incliné, et l'axe (Oy) est perpendiculaire au plan incliné, comme schématisé ci-dessous.



La masse est lancée initialement depuis le point O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{e}_x$, où $v_0 = 3{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. On considère dans un premier temps que la masse glisse sur le plan incliné sans frottement.

1. Établir l'équation du mouvement lors de la montée, puis en déduire la loi horaire $x(t)$.
2. Calculer l'instant où la masse s'arrête avant de redescendre, ainsi que la distance qu'elle a parcouru.
3. Calculer l'instant où la masse est revenue en O.

On tient maintenant compte des frottements solides. La réaction du support est alors $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_\text{n} + \overrightarrow{R}_\text{t}$, avec $\overrightarrow{R}_\text{n}$ la réaction normale au plan incliné et $\overrightarrow{R}_\text{t}$ la réaction tangentielle (c'est-à-dire les frottements). On précise que pour un solide qui glisse sur un support, les réactions vérifient : $\left\|\overrightarrow{R}_\text{t}\right\| = f\left\|\overrightarrow{R}_\text{n}\right\|$, avec un coefficient de frottement $f = 0{,}2$ dans ce cas.

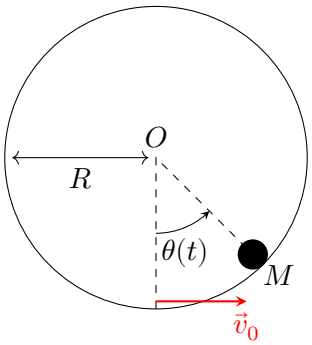
4. Établir l'équation du mouvement lors de la montée, puis en déduire la loi horaire $x(t)$.
5. Calculer l'instant où la masse s'arrête avant de redescendre, ainsi que la distance qu'elle a parcouru.

Lorsque la masse s'arrête, la force de frottement solide est modifiée. On précise que pour un solide qui ne glisse pas sur un support, les réactions vérifient : $\left\|\overrightarrow{R}_\text{t}\right\| \leqslant f\left\|\overrightarrow{R}_\text{n}\right\|$.

6. Déterminer le sens de la force de frottement lorsque la masse s'immobilise.
7. Calculer l'angle limite α_lim au-delà duquel la masse reste immobile sans redescendre en glissant.

Exercice 6 : Mouvement dans un tube

On considère une bille, assimilée à un point matériel de masse m, qui se déplace sans frottement à l'intérieur d'un tube cylindrique de rayon R, comme représenté ci-dessous. On note $\theta(t)$ l'angle qu'elle réalise par rapport à sa position initiale en bas du tube, où elle est lancée avec une vitesse horizontale de norme v_0.



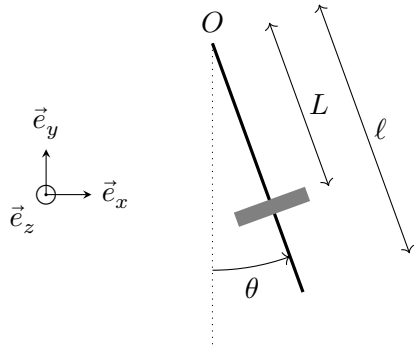
1. À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, exprimer la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ de la bille en fonction de $\theta(t)$, R, v_0 et g l'intensité de la pesanteur.
2. Montrer que la norme de la force de réaction du support peut s'exprimer :

$$N = m\left\{\frac{v_0^2}{R} + g\left[3\cos\theta(t) - 2\right]\right\}.$$

3. Déterminer la vitesse $v_{0,\text{min}}$ en-dessous de laquelle la bille quitte le support sans réaliser un tour complet du cylindre.
4. Dans le cas où $v_0 < v_{0,\text{min}}$, déterminer l'angle θ_lim pour lequel la bille quitte le support.

Exercice 7 : Horloge à balancier

On modélise le balancier d'une horloge par une tige de masse m et de longueur ℓ pouvant tourner sans frottement autour de l'axe (Oz), sur laquelle est fixée un contrepoids de masse $M \gg m$ à une distance L de l'axe, comme schématisé ci-dessous.



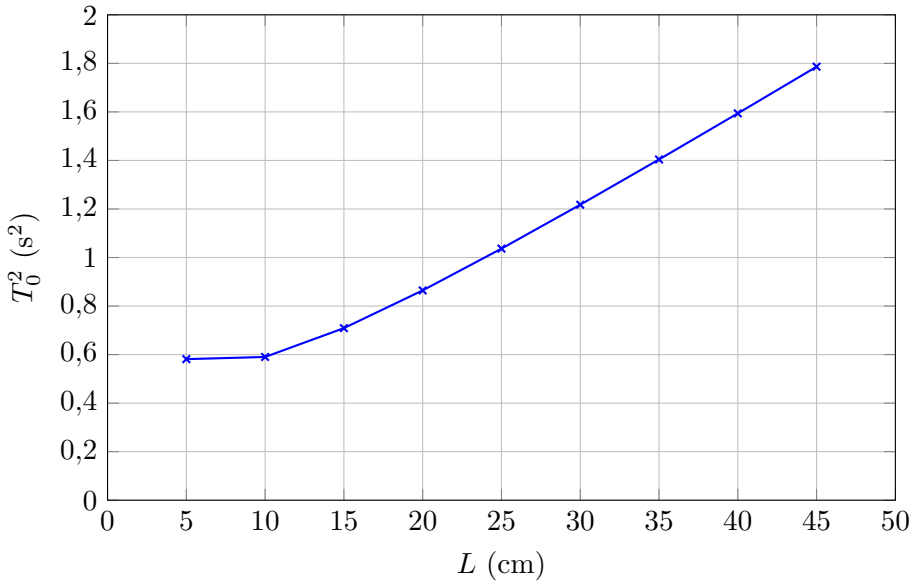
On souhaite étudier l'évolution de la période du balancier en fonction de la position du contrepoids pour des petites oscillations. On rappelle pour cela les expressions des moments d'inertie par rapport à l'axe (Oz) :

- de la tige : $J_\mathrm{t} = \dfrac{m\,\ell^2}{3}$;
- du contrepoids : $J_\mathrm{c} = M\,L^2$.

1. Sachant que le moment d'inertie d'un solide est une grandeur extensive, exprimer le moment d'inertie du balancier.

2. Déterminer l'expression de la période T_0 des petites oscillations du balancier.

On représente ci-dessous un relevé expérimental de T_0^2 en fonction de la position L.



3. Interpréter l'allure de cette courbe.

4. En déduire une mesure de la valeur de l'intensité de la pesanteur.

Exercice 8 : Course de voitures télécommandées

Alice et Bernard réalisent une course avec leurs nouvelles voitures télécommandées. La voiture d'Alice possède une accélération de $2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et une vitesse limitée à $12\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, tandis que celle de Bernard accélère à $3\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ mais sa vitesse plafonne à $10\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

1. Qui gagne la course dans l'allée du jardin qui fait 15 m ?

2. Quelle distance le perdant doit-il proposer pour la revanche afin d'être sûr de gagner ?

Exercice 9 : Point matériel relié à un solide oscillant

On considère un point matériel M de masse m pouvant se déplacer le long d'un axe horizontal (Ox). Le point M est relié à un solide S par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Il est également soumis à une force de frottement fluide qui s'exprime : $\vec{f} = -\beta\,\vec{v}$, avec β une constante et $\vec{v}$ son vecteur vitesse.



Dans un premier temps, on suppose que la position du solide S est fixée sur l'axe horizontal tel que : $\overrightarrow{OS} = -\ell_0\,\vec{e}_x$. Le point M est lâché sans vitesse initiale depuis la position x_0 à l'instant $t = 0$, et présente ensuite un régime pseudo-périodique.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ du point M, puis l'écrire sous forme canonique en définissant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.

2. En déduire l'expression de la position $x(t)$.

3. Sachant que l'amplitude du mouvement est réduite de moitié après 3 oscillations, déterminer la valeur de Q.

On suppose maintenant que le solide S oscille avec une pulsation ω tel que : $\overrightarrow{OS} = [-\ell_0 + a\cos(\omega\,t)]\,\vec{e}_x$. Le point M présente alors un régime sinusoïdal forcé.

4. Établir l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ du point M, puis l'écrire sous forme canonique.

5. En déduire l'expression de l'amplitude X des oscillations en régime sinusoïdal forcé.

6. Représenter l'allure de l'amplitude X en fonction de la pulsation ω.